Ejercicio 9. Obtener una base y la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Una base de $\mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ (los escalares son números complejos) es el conjunto $\{1\}$, ya que claramente es linealmente independiente y un sistema generador pues cualquier otro número complejo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) se puede escribir como una combinación lineal del 1 ($z = z.1$), nótese que esto es debido a que los escalares son números complejos y podemos coger como escalar el propio z.

Si ahora consideramos el espacio vectorial $\mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ (los escalares son números reales), sólo el 1 no me permite escribir un número complejo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) como combinación lineal de él con un escalar real, es decir:

No existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $z = a + bi = \alpha.1$ (notar que es necesario añadir algo para que aparezca la parte imaginaria de z)

En efecto, la base del espacio vectorial $\mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ está formada por dos números complejos $\{1, i\}$ y ahora claramente son linealmente independientes (la unidad imaginaria i no es posible escribirla como una combinación lineal del 1 con un escalar real) y además es un sistema generador, ya que:

Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $z = a + bi = \alpha.1 + \beta.i$ (claramente $\alpha = a$ y $\beta = b$).

Ejercicio 10. Comprobar si {(i, 1+i), (2, -1-i)} es una base del espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. ¿y de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$?

Teniendo en cuenta el Corolario 4.9 de las trasparencias y como conocemos las dimensión de este espacio $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ (igual que el número de vectores de este conjunto), bastará ver que estos dos vectores son linealmente independientes.

Tomamos una combinación lineal de ellos igualada a cero y probamos si es posible obtener escalares no todos nulos:

$$\alpha(i, 1+i) + \beta(2, -1-i) = (0,0)$$

Operando

$$(i\alpha + 2\beta, (1+i)\alpha + (-1-i)\beta) = (0,0) \longrightarrow \begin{cases} i\alpha + 2\beta = 0 \\ (1+i)\alpha + (-1-i)\beta = 0 \end{cases}$$

Sabemos que dos pares son iguales si y sólo si coinciden coordenada a coordenada:

Discutimos el sistema, estudiando el rango de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} i & 2 \\ 1+i & -1-i \end{vmatrix} = -i+1-2-2i = -1-3i \neq 0$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, luego el sistema es compatible determinado, tiene una única solución: $\alpha = \beta = 0$. Por tanto, estos vectores son linealmente independientes o lo que es equivalente foman una base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.

¿Pueden ser base del espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$? La respuesta es rápida si pensamos en la dimensión de este espacio vectorial. Lo mismo que ocurre con el espacio $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, nos pasa en este espacio, necesitamos más de dos vectores para poder generar todo el espacio vectorial. De hecho la base canónica de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ está formada por 4 vectores, a saber: $\{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$. Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

Así como $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$, y teniendo en cuenta que todas las base de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de vectores, un conjunto con dos vectores no puede ser una base del espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.